Λύσεις διαγωνίσματος Προσομοίωσης Γ Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Σχολικό σχολείο σελ. 128

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 74

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 117

Α4. Εφαρμογή σελ. 25-26

Α5. i)Λ ii)Λ iii)Λ iv)Λ v)Σ

Θέμα Β

Β1. $E(\Omega) = \int_0^1 (4^x - x)\,dx + E_T = \left[\frac{4^x}{ln\,4}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{9}{2} = \frac{3}{\ln 4} + 4$

Β2. $i)\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 + 3 = \alpha \Rightarrow \alpha = 4$

ii) στο [-1,1] $-x^2 + 3 > 0$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 3)\,dx + \int_{I}^{2} \left(4\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \frac{8 + 8\sqrt{8}}{3}$$

Πυξίδα

Θέμα Γ

Γ1. $f'(x) = \frac{1 - ln\,x}{x^2} - 1 = \frac{1 - ln\,x - x^2}{x^2}$ θέτουμε $h(x) = 1 - ln\,x - x^2$

$h'(x) = -\frac{1}{x} - 2x = \frac{-1-2x^2}{x} = -\frac{1+2x^2}{x} < 0 \Rightarrow h$ γνησίως φθίνουσα

$$h(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$-$
$h(x)$	$\downarrow$		$\downarrow$

Αν $x < 1 \Rightarrow h(x) > h(1) \Rightarrow h(x) > 0$

Αν $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$

Άρα

x	0	1	$+\infty$

$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Στο $(0,1]$ η f είναι $\nearrow$

Στο $[1,+\infty)$ η f είναι $\searrow$

Στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 0$

Γ2. $f''(x) = \frac{x(2\ln x - 3)}{x^2} = \frac{2\ln x - 3}{x}$

$f''(x) > 0 \Rightarrow 2\ln x - 3 > 0 \Rightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Rightarrow x > e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x > \sqrt{e^3}$

x	0	$\sqrt{e^3}$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Γ3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x} - x + 1\right) = -\infty \cdot (+\infty) - 0 + 1 = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

Πλάγια ασύμπτωτη $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x}\right) = 0 - 1 + 0 = -1$

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

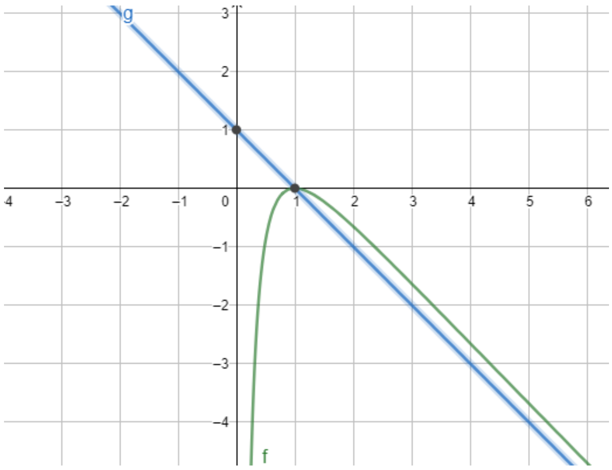
Και

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + 1 - x + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

Πλάγια ασύμπτωτη $y = -x + 1$ στο $+\infty$

Γ4. Συγκεντρωτικός πίνακας

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$			



Γ5 . αρχικά βρίσκω το σύνολο τιμών της f

$$f(\Delta_1) = (-\infty, 0]$$

$$f(\Delta_2) = (-\infty, 0]$$

Αν λ<0 τότε έχει 2 ρίζες αφού $0 \in f(\Delta_1)$ $\kappa\alpha\iota$ $0 \in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Αν λ=0 τότε η εχει μοναδική λύση

Αν λ>0 τότε δεν εχει λύση

Πυξίδα

Γ6. Η εφαπτομένη στο ακρότατο είναι η y=0 άρα ο άξονας x'x και f(x)<0 άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(\frac{\ln x}{x} - x + 1\right) dx = -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - [x]_{\frac{1}{e}}^{1} = \frac{2e-1}{2e^2}$$

Γ7. $f(x) - y = \frac{\ln x}{x} - x + 1 + x - 1 = \frac{\ln x}{x}$

Όταν $x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = -\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} \frac{\ln x}{x} dx = -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{e}} = \frac{\ln^2 \lambda}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} E(\Omega) = \lim_{\lambda \to 0^+} \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

Θέμα Δ

Δ1. $(e^x + 1) \cdot f'(x) = e^x\big(1 - f(x)\big) \Rightarrow$

$$e^x \cdot f'(x) + f'(x) = e^x - e^x \cdot f(x) \Rightarrow$$

$$e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x - f'(x) \Rightarrow$$

$$\big(e^x \cdot f(x)\big)' = \big(e^x - f(x)\big)' \Rightarrow$$

$$e^0 f(0) = e^0 - f(0) + C \Rightarrow c = 2$$

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$$

Δ2. $f'(x) = \frac{e^x.(e^x+1)-(e^x+2)\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Δ3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) D^{LH} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = 2$$

Οπότε η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Δ4. $E(\Omega) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x+1}dx = \int_J^1 \frac{e^x+2}{(e^x+1)e^x} \cdot e^x\,dx =$
$\int_1^e \frac{u+2}{(u+1)\cdot u}du = \int_1^e \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = [2\ln u]_1^e - [\ln|u+1|]_1^e =$
$2\ln e - \ln(e+1) + \ln 2$

Δ5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x \cdot \frac{e^x+2}{e^x+1} \cdot \eta\mu\frac{\Pi}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\pi \cdot \left(\frac{e^x+2}{e^x+1} \cdot \frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)\right] = 2\pi$

Δ6. $y = \frac{e^x+2}{e^x+1} \Rightarrow y \cdot (e^x + 1) = e^x + 2 \Rightarrow y \cdot e^x - e^x = 2 - y \Rightarrow e^x(y-1) = 2 - y \Rightarrow e^x = \frac{2-y}{y-1} \Rightarrow x = \ln\frac{2-y}{y-1} \Rightarrow$
$f^{-1}(x) = \ln\frac{2-y}{y-1}$

$$A_{f^{-1}} = (1{,}2) = f(\Delta)$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Πυξίδα