

Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θέμα 1^ο

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle . (5 μονάδες)

A2. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano(5 μονάδες)

A3. Να αποδείξετε ότι $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$ (5 μονάδες)

A4. Ισχύει ότι $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (5 μονάδες)

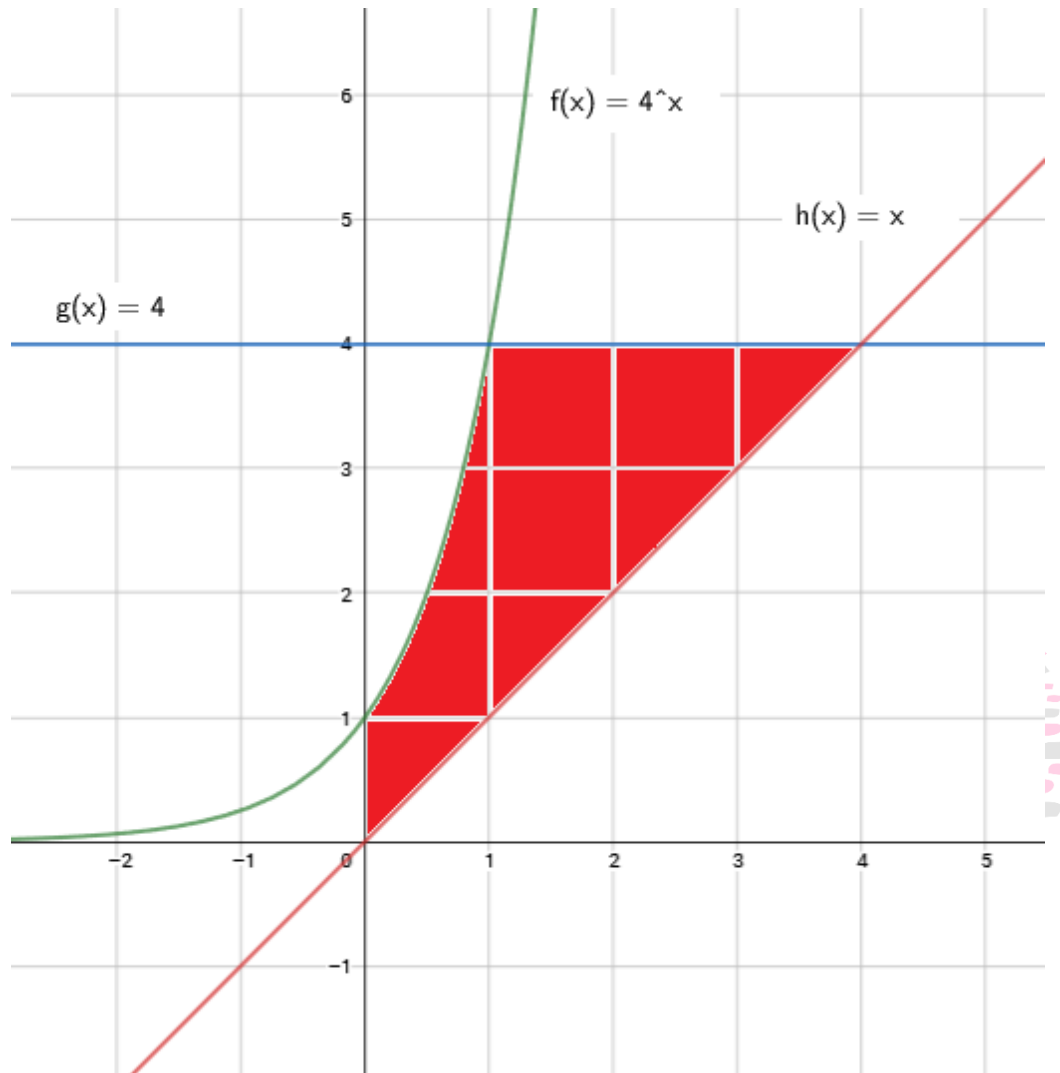
A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος**

- i) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$
- ii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$ τότε $f(0) \neq f(1)$
- iii) Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\alpha}^b f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^b g(x) dx$
- iv) Αν $\int_{\alpha}^b f(x) dx = 0$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$
- v) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$, τότε $\int_{\alpha}^b f(x) dx \geq 0$

(5 μονάδες)

Θέμα 2^ο

B1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου



(13 μονάδες)

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, & \text{αν } x < 1 \\ a\sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Να βρεθεί

- Η τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ (2 μονάδες)

- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον x και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$ (10 μονάδες)

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 1, x > 0$

Γ1 . Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα (6 μονάδες)

Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (4 μονάδες)

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f (3 μονάδες)

Γ4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f (5 μονάδες)

Γ5. Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (2 μονάδες)

Γ6. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της στο ακρότατο της και την ευθείας $x = \frac{1}{e}$ (3 μονάδες)

Γ7. Να βρεθεί το $E(\Omega)$, του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f της ευθείας $y = -x + 1$ και των ευθειών $x = \frac{1}{e}, x = \lambda$ για $0 < \lambda < \frac{1}{e}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\Omega)$.

(2 μονάδες)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

α. $(e^x + 1) \cdot f'(x) = e^x(1 - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\beta. f(0) = \frac{3}{2}$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f . (7 μονάδες)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (3 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f . (5 μονάδες)

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$ (3 μονάδες)

Δ5. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot f(x) \cdot \eta\mu \frac{\pi}{x} \right)$ (2 μονάδες)

Δ6. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} (5 μονάδες)